

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapă Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025****CLASA a VIII-a****Problema 1.** Fie mulțimile

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ și } x + y + 1 = 0\}, \quad B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ și } x^3 + y^3 + 1 = 3xy\}.$$

- a) Arătați că $A \subset B$.
b) Arătați că mulțimea $B \setminus A$ are exact un element.

Problema 2. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația

$$x^2 + y^2 + xy(x - y) = 17.$$

*Gazeta Matematică***Problema 3.** Numerele reale strict pozitive x, y, z verifică relațiile

$$xy + 4 \leq 2(x + z), \quad yz + 4 \leq 2(y + x), \quad zx + 4 \leq 2(z + y).$$

Demonstrați că $x = y = z$.

Problema 4. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub. Pe segmentele BC și DD' luăm punctele M , respectiv N , astfel încât $BM = DN$. Arătați că dreapta $A'M$ este perpendiculară pe planul $(AB'N)$.

*Timp de lucru 3 ore.**Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*