

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025****CLASA a VI-a**

Problema 1. Fie numerele naturale a, b, c pentru care numerele $m = \frac{5a + 6b + 7c + 6}{4a + 3b + 2c + 3}$ și $n = \frac{a + 2b + 3c + 5}{3a + b + 2c + 5}$ sunt simultan numere naturale.

- a) Arătați că $m \geq 2$.
- b) Determinați numerele m și n .

Problema 2. Aflați numerele naturale nenule a și b pentru care

$$\frac{a}{(a, b)} = b + \frac{48 \cdot (a, b)}{[a, b]} \quad \text{și} \quad \frac{b}{(a, b)} = a - \frac{312 \cdot (a, b)}{[a, b]}.$$

Am notat cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b , iar cu $[a, b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie ABC un triunghi isoscel cu $\angle BAC = 30^\circ$ și $AB = AC$. Considerăm punctul D pe latura AC și punctele distincte E, F, G pe latura AB astfel încât $BC = BD = DE = EF$, iar $DG = DF$.

- a) Arătați că $BF = GE$.
- b) Aflați măsura unghiului BCG .

Problema 4. Determinați numerele naturale $n \geq 2$ cu proprietatea că n este divizibil cu fiecare dintre numerele

$$d_1, d_1 + d_2, \dots, d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1},$$

unde $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{k-1} < d_k = n$ sunt toți divizorii naturali ai lui n .

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.