

Országos Matematikaolimpia  
Megyei forduló - 2025. március 8.

## XII. OSZTÁLY

**1. feladat.** Legyen  $(G, \cdot)$  egy csoport, amelynek semleges eleme  $e$ . Ha  $A$  a csoport egy nemüres részhalmaza, legyen  $AA = \{xy \mid x, y \in A\}$ .

- a) Igazold, hogy ha  $G$  véges, akkor  $AA = A$  akkor és csak akkor, ha  $e \in A$  és  $|AA| = |A|$ .  
 b) Adj példát egy olyan  $G$  csoportra és  $A \subseteq G$  részhalmazra, amelyre,  $AA \neq A$ ,  $|AA| = |A|$  és  $AA < G$ .

(A  $H < G$  jelölés azt jelenti, hogy  $H$  valódi részcsoportja a  $G$  csoportnak, azaz olyan részcsoportja  $G$ -nek, amely nem egyenlő  $G$ -vel.)

*Gazeta Matematică*

**2. feladat.** Legyen  $(G, \cdot)$  egy csoport,  $H < G$  a  $G$  csoport egy valódi részcsoportja. Ha léteznek olyan  $f, g$  és  $h : G \rightarrow G$  morfizmusok, amelyekre  $f(xy) = g(x)h(y)$  bármely  $x, y \in G \setminus H$  esetén, bizonyítsd be, hogy:

- a)  $g = h$ ;  
 b) ha  $G$  nem kommutatív csoport és  $H = Z(G)$ , akkor  $f = g = h$ .  
 (A  $Z(G) = \{c \in G \mid cx = xc, \forall x \in G\}$  halmazt a  $G$  csoport centrumának nevezzük.)

**3. feladat.** a) Adott az  $a$  és  $b$  valós szám úgy, hogy  $a < b$  és  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  egy szigorúan monoton függvény, amelyre  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Igazold, hogy  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .  
 b) Határozd meg azokat az  $(a_n)_{n \geq 1}$  konvergens valós számsorozatokat, amelyekre létezik egy szigorúan monoton  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény úgy, hogy:

$$\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x) dx = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx, \quad \text{bármely } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \text{esetén.}$$

**4. feladat.** Legyen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  egy folytonos függvény. Értelmezzük az  $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt úgy, hogy

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t) dt & , \text{ ha } x > 0, \\ f(0) & , \text{ ha } x = 0. \end{cases}$$

- a) Igazold, hogy az  $\tilde{f}$  folytonos a 0 pontban és deriválható a  $(0, 1]$  intervallumon!  
 b) Bizonyítsd be az alábbi egyenlőséget:

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 + \int_0^1 (f(x) - \tilde{f}(x))^2 dx.$$

*Munkaidő 3 óra.*

*Minden feladatra legfeljebb 7 pont szerezhető.*