

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025****CLASA a XI-a**

Problema 1. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_2(1 + a_k) = 2$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Spunem că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea (\mathcal{P}) dacă $\det(A + X_{ij}) = \det(A + X_{ji})$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, unde $X_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este matricea care are 1 pe poziția (i, j) și 0 în rest.

- Arătați că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea (\mathcal{P}) și $\det(A) \neq 0$, atunci $A = A^T$.
- Dați un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care are proprietatea (\mathcal{P}) , dar $A \neq A^T$.

Problema 3. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă și bijectivă, astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(f(x)/x)}{x} = 1.$$

- Arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(ax)}{f^{-1}(x)} = 1$, pentru oricare $a > 0$.
- Dați un exemplu de funcție f care satisface condițiile din enunț.

Problema 4. Determinați toate tripletele de matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{aligned} A &= BC - CB \\ B &= CA - AC \\ C &= AB - BA \end{aligned}.$$

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.