



**Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”**

**Etapa județeană**

**08 martie 2025**

**Clasa a X –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

**SUBIECTUL 1**

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x + x$ .

a) Demonstrați că  $n = f(3 \log_2 5) - f(\log_2 500)$  este un număr întreg.

b) Să se arate ca funcția  $f$  este injectivă.

c) Rezolvați în mulțimea  $(0, \pi)$  ecuația  $2^{\sin^2 x} - 2^{\cos^2 x} = \cos 2x$ .

**SOLUȚIE:**

a) Calculează  $f(3 \log_2 5) = 125 + \log_2 125$  și  $f(\log_2 500) = 500 + \log_2 500$ .....1p

Obține  $n = -375 + \log_2 \frac{1}{4} = -377$  care este număr întreg.....1p

b) Funcțiile  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2^x$  și  $h(x) = x$  sunt strict crescătoare.....1p

Funcția  $f$  este strict crescătoare (sumă de funcții strict crescătoare) de unde rezultă că  $f$  este funcție injectivă.....1p

c) Obține  $2^{\sin^2 x} + \sin^2 x = 2^{\cos^2 x} + \cos^2 x$ .....1p

Din  $f$  injectivă deduce că  $\sin^2 x = \cos^2 x$ .....1p

Folosind  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , obține  $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Cum  $x \in (0, \pi)$ , găsește soluția  $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ .....1p

**SUBIECTUL 2**

Fie ecuația  $(1 + i)x^2 - 2mx + m - i = 0, m \in \mathbb{R}$ .

a) Pentru  $m=1$  rezolvați ecuația în mulțimea numerelor complexe.

b) Pentru  $m = -1$ , arătați că numărul  $\frac{1}{x_1^2 + x_1 - 2} + \frac{1}{x_2^2 + x_2 - 2}$  este real, unde  $x_1$  și  $x_2$  sunt rădăcinile ecuației.

c) Determinați numerele reale  $m$  pentru care ecuația are o rădăcină reală.

**SOLUȚIE:**

a) Obține ecuația  $(1 + i)x^2 - 2x + 1 - i = 0$  cu soluțiile  $x_1 = 1$  și  $x_2 = -i$ .....1p

b)  $(1 + i)x^2 + 2x - 1 - i = 0 \Leftrightarrow x^2 + (1 - i)x - 1 = 0$  (prin înmulțire cu  $1 - i$ ), cu rădăcinile  $x_1$  și  $x_2$  care au  $S = -1 + i$  și  $P = -1$ .....1p

Deduce că  $x_1^2 + (1 - i)x_1 - 1 = 0$  și  $x_2^2 + (1 - i)x_2 - 1 = 0$  și obține  $x_1^2 + x_1 - 2 = -1 + ix_1$  și  $x_2^2 + x_2 - 2 = -1 + ix_2$ .....1p

Finalizare  $\frac{1}{x_1^2 + x_1 - 2} + \frac{1}{x_2^2 + x_2 - 2} = \frac{iS - 2}{-P - iS + 1} = -1 \in \mathbb{R}$ .....1p



c) Dacă  $\alpha$  este soluția reală a ecuației rezultă că:

$$(1+i)\alpha^2 - 2m\alpha + m - i = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2m\alpha + m + i(\alpha^2 - 1) = 0, \text{ cu } m, \alpha \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deduce că } \alpha^2 - 2m\alpha + m = 0 \text{ și } \alpha^2 - 1 = 0 \text{ de unde obține } m \in \left\{1, -\frac{1}{3}\right\} \dots\dots\dots 2p$$

### SUBIECTUL 3

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{7+x} = 2$ .

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$4(x-3)^{\log_6(x^2+11)} + 2(x^2+11)^{\log_6(x-3)} = 6(x-3)^2.$$

c) Determinați domeniul maxim de definiție al funcției

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{0,01-x}(lg^2x^2 + 12lgx + 8)$$

### SOLUȚIE:

a) Notează  $a = \sqrt[3]{1-x}, b = \sqrt{7+x}, x \in [-7, \infty)$  și  $a + b = 2, a^3 + b^2 = 8$  de unde obține

$$a^3 + a^2 - 4a - 4 = 0 \dots\dots\dots 1p$$

Determină  $a \in \{-2, -1, 2\}$  de unde obține  $x \in \{-7, 2, 9\}$  care convin  $\dots\dots\dots 1p$

b) Deoarece  $(x^2+11)^{\log_6(x-3)} = (x-3)^{\log_6(x^2+11)}$  cu  $x \in (3, \infty)$ , obține ecuația echivalentă

$$(x-3)^{\log_6(x^2+11)} = (x-3)^2 \dots\dots\dots 1p$$

Găsește  $\log_6(x^2+11) = 2$  sau  $x-3 = 1$ , de unde obține  $x \in \{4, 5\}$ , care convin  $\dots\dots\dots 1p$

$$c) \text{ Pune condițiile de existență: } \begin{cases} lg^2x^2 + 12lgx + 8 > 0 \\ 0,01-x > 0 \\ 0,01-x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$lg^2x^2 + 12lgx + 8 > 0 \Leftrightarrow lg^2x + 3lgx + 2 > 0 \Leftrightarrow lgx \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Finalizare } \begin{cases} x \in \left(-\infty, \frac{1}{100}\right) \cup \left(\frac{1}{10}, \infty\right) \\ x \in \left(-\infty, \frac{1}{100}\right) \\ x \neq -\frac{99}{100} \\ x \in (0, \infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{100}\right) \dots\dots\dots 1p$$

### SUBIECTUL 4

Andrei și Bogdan locuiesc pe aceeași stradă liniară în casele A și B de afixe

$$z_A = 1 - i \text{ și } z_B = -1 + i.$$

a) Determinați distanța dintre cele două case.

b) Cezar și Dan vor să-și construiască câte o casă C și D de o parte și de alta a străzii AB astfel încât cele patru case să fie vârfurile unui romb cu latura egală cu distanța dintre casele lui Andrei și Bogdan. Determinați afixele punctelor C și D.

c) Determinați numărul real  $m$  știind că Marian are un magazin M de afix  $z_M = 5 + mi$  pe strada pe care locuiesc Andrei și Bogdan astfel încât casa lui Andrei să fie situată între casa lui Bogdan și magazin (M-A-B coliniare).



**SOLUȚIE:**

a)  $AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{2}$ .....1p

b)  $\Delta ABC$  echilateral  $\Rightarrow |z_B - z_A| = |z_A - z_C| = |z_B - z_C|$  unde C are afixul

$z_C = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$  .....1p

Deduce  $(a - 1)^2 + (b + 1)^2 = (a + 1)^2 + (b - 1)^2 = 8$ .....1p

Obține  $a = b$  și  $a = \pm\sqrt{3}$  și găsește punctele C și D de afixe  $z_C = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$  și

$z_D = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$ .....1p

c) Deoarece  $A \in (MB) \Rightarrow \frac{z_M - z_B}{z_A - z_B} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{6 + (m-1)i}{2-2i} \in \mathbb{R}$ .....1p

Obține  $\frac{7-m}{4} + \frac{m+5}{4}i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = -5$ .....2p