



Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a IX –a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1

a) Să se determine primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ dacă:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{25} = 950 \text{ și } 2a_3 - a_7 = -4.$$

b) Fie șirul de numere reale $(c_n)_{n \geq 1}$, definit prin $c_1 = 1$, $c_{n+1} - 2c_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$, definit prin $b_n = 1 + c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ este o progresie geometrică.

SOLUȚIE:

$$a) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{25} = 950 \Leftrightarrow a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \dots + (a_1 + 24r) = 950 \Leftrightarrow$$

$$25a_1 + r(1 + 2 + \dots + 24) = 950 \Leftrightarrow 25a_1 + 300r = 950 \Leftrightarrow a_1 + 12r = 38 \dots\dots\dots 1p$$

$$2a_3 - a_7 = -4 \Leftrightarrow a_1 - 2r = -4 \dots\dots\dots 1p$$

$$\begin{cases} a_1 + 12r = 38 \\ a_1 - 2r = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 3 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

$$b) \quad c_1 = 1, \quad b_1 = 1 + c_1 = 1 + 1 = 2, \quad c_{n+1} - 2c_n = 1 \Rightarrow c_{n+1} = 2c_n + 1 \Rightarrow c_n > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1+2c_{n+1}}{1+c_n} = \frac{2(1+c_n)}{1+c_n} = 2 \dots\dots\dots 2p$$

$$(b_n)_{n \geq 1} \text{ este progresie geometrică cu } b_1 = 2 \text{ și rația } q = 2. \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 2

În triunghiul ABC se consideră punctul E mijlocul segmentului $[AB]$, F mijlocul medianei din C , $D \in (BC)$ astfel încât $BD = 2 \cdot DC$ și $P \in (AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AC}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{BA}$.

b) Să se arate că punctele A, F și D sunt coliniare.

c) Să se calculeze raportul $\frac{AF}{AD}$.

SOLUȚIE:

$$a) \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AC}. \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}. \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{7} \cdot (-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BA} - \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{4}{7} \cdot \overrightarrow{BA} \dots\dots\dots 1p$$

b) În triunghiul ABC punctul E este mijlocul segmentului $[AB]$, de unde rezultă că $[CE]$ este mediana din C și F este mijlocul segmentului $[CE]$.

În triunghiul AEC se aplică teorema medianei și se obține:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{4} \cdot (\overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}). \dots\dots\dots 1p$$

$D \in (BC), BD = 2 \cdot DC \Rightarrow \overrightarrow{BD} = 2 \cdot \overrightarrow{DC}$. Rezultă că punctul D împarte segmentul $[BC]$ în raportul $k = 2$.

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{1+2} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC}). \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AF} \text{ și } \overrightarrow{AD} \text{ sunt coliniari} \Rightarrow A, F, D \text{ sunt puncte coliniare.} \dots\dots\dots 1p$$

$$c) \quad \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AF}| = \left| \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AD} \right| \Rightarrow AF = \frac{3}{4} \cdot AD \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{3}{4}. \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 3

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.

- a) Să se determine soluțiile reale ale ecuației: $(f(x))^2 + 2 \cdot f(x) - 3 = 0$.
- b) Determinați funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g = \underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{f \text{ este de } n \text{ ori}}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar " \circ " reprezintă compunerea funcțiilor.
- c) Să se calculeze: $f(1) \cdot f(2) + f(2) \cdot f(3) + \dots + f(99) \cdot f(100) + f(100) \cdot f(101)$.

SOLUȚIE:

a) $(f(x))^2 + 2 \cdot f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + 2 \cdot (2x - 1) - 3 = 0 \dots\dots\dots 1p$

În urma calculului se obține: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \dots\dots\dots 1p$

b) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2(2x - 1) - 1 = 2^2x - 2 - 1 = 2^2x - 2^2 + 1$

$(f \circ f \circ f)(x) = 2^3x - 2^3 + 1 \dots\dots\dots 1p$

$P(n): \underbrace{(f \circ f \circ f \dots \circ f)}_{f \text{ este de } n \text{ ori}}(x) = 2^n x - 2^n + 1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \dots\dots\dots 1p$

I. $P(2)$ este adevărată.

II. Presupunem adevărată $P(k): \underbrace{(f \circ f \circ f \dots \circ f)}_{f \text{ este de } k \text{ ori}}(x) = 2^k x - 2^k + 1, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

Demonstrăm că este adevărată $P(k + 1): \underbrace{(f \circ f \circ f \dots \circ f)}_{f \text{ este de } k+1 \text{ ori}}(x) = 2^{k+1} x - 2^{k+1} + 1$.

$$\underbrace{(f \circ f \circ f \dots \circ f)}_{f \text{ este de } k+1 \text{ ori}}(x) = f(\underbrace{(f \circ f \circ f \dots \circ f)}_{f \text{ este de } k \text{ ori}}(x)) = 2(2^k x - 2^k + 1) - 1 = 2^{k+1} x - 2^{k+1} + 2 - 1$$

$$= 2^{k+1} x - 2^{k+1} + 1 \Rightarrow P(k + 1) \text{ este adevărată .}$$

Din I. și II. $\Rightarrow P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

$g(x) = \underbrace{(f \circ f \circ f \dots \circ f)}_{f \text{ este de } n \text{ ori}}(x) = 2^n x - 2^n + 1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \dots\dots\dots 1p$

c) $f(k) \cdot f(k + 1) = (2k - 1)(2k + 1) = 4k^2 - 1$

$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \dots\dots\dots 1p$

$$f(1) \cdot f(2) + f(2) \cdot f(3) + \dots + f(n) \cdot f(n + 1) = \sum_{k=1}^n (4k^2 - 1) = 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n =$$

$$= \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) + f(2) \cdot f(3) + \dots + f(99) \cdot f(100) + f(100) \cdot f(101) = 1353300 \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 4.

Trei motocicliști, A, B și C, parcurg aceeași distanță, traiectoria lor fiind o linie dreaptă. Motociclistul B parcurge distanța cu viteză de 60km/h, iar motociclistul C cu viteză de 40km/h. Știind că B merge cu 2 ore mai puțin decât A, iar C merge cu 2 ore mai mult decât A, determinați viteza motociclistului A. Legea mișcării este $v = \frac{d}{t}$, unde v este viteza[km/h], d este distanța[km], iar t este timpul[h].



SOLUȚIE:

Fie d distanța parcursă de motocicliști exprimată în km , t numărul de ore în care motociclistul A parcurge distanța d , iar v_A, v_B, v_C reprezintă vitezele celor trei motocicliști.

$$d = v_A \cdot t, \quad d = v_B \cdot (t - 2), \quad d = v_C \cdot (t + 2) . \quad \dots\dots\dots 3p$$

$$v_B = 60 [km/h], \quad v_C = 40 [km/h] \Rightarrow 60 \cdot (t - 2) = 40 \cdot (t + 2). \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$60t - 120 = 40t + 80 \Rightarrow 20t = 200 \Rightarrow t = 10 [h]. \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$d = v_B \cdot (t - 2) = 60 \cdot 8 = 480 \Rightarrow d = 480 [km]. \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$d = v_A \cdot t \Rightarrow 480 = v_A \cdot 10 \Rightarrow v_A = 48 [km/h]. \quad \dots\dots\dots 1p$$