

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa județeană

08 martie 2025

Clasa a X –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

O planetă acoperită în întregime de apă descrie o rotație completă în jurul stelei sale într-un an de 360 de zile. Temperatura medie a apei de pe planetă în cea de-a n -a zi a anului, exprimată în grade Celsius, este dată de formula

$$T(n) = \frac{100}{3} + \frac{200 \cdot \sin(n^\circ)}{3}, \text{ unde } n \in \{1, 2, 3, \dots, 360\}.$$

a) În câte zile ale unui an este planeta înghețată, știind că apa îngheață la $0^\circ C$?

b) Care este temperatura medie maximă a apei de pe acea planetă de-a lungul unui an?

Soluție:

a) Condiția $\frac{100}{3} + \frac{200 \cdot \sin(n^\circ)}{3} \leq 0$ revine la $\sin(n^\circ) \leq -\frac{1}{2}$ 1p

$n \in \{210, 211, \dots, 330\}$, deci apa este înghețată timp de 121 de zile 3p

b) $T(n)$ este maximă atunci când $\sin(n^\circ) = 1$. Pentru $n = 90$ obținem $T_{\max} = \frac{100}{3} + \frac{200}{3} = 100^\circ C$... 3p

Subiectul 2

a) Determinați mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n^2 + n + 15} \in \mathbb{Q}\}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 \leq \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

Soluție:

a) $\sqrt{n^2 + n + 15} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă numărul $n^2 + n + 15$ este un pătrat perfect 1p

Observăm că $n^2 < n^2 + n + 15 < (n+4)^2, \forall n \in \mathbb{N}$ 1p

Rezolvând în numere naturale ecuațiile $n^2 + n + 15 = (n+1)^2$, $n^2 + n + 15 = (n+2)^2$ și $n^2 + n + 15 = (n+3)^2$, obținem singura soluție convenabilă $n = 14$, prin urmare $A = \{14\}$ 1p

b) Din condițiile de existență ale logaritmilor rezultă că $x \in (0, +\infty) \setminus \{2, 4\}$ 1p

Inecuația din enunț se scrie sub forma $\frac{3}{\log_2 x - 1} + \frac{3}{\log_2 x - 2} \leq \frac{2 \log_2 x}{\log_2 x - 2}$ 1p

Cu notația $\log_2 x = t$, avem de rezolvat inecuația $\frac{3}{t-1} + \frac{3}{t-2} \leq \frac{2t}{t-2}$. Obținem $t \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$,

prin urmare $x \in (0, 2) \cup (4, +\infty)$ 2p

Subiectul 3

a) Demonstrați inegalitatea $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{\sqrt{xyz}}$, $\forall x, y, z \in (0, +\infty)$.

b) Fie a, b și c trei numere complexe nenule având același modul. Arătați că $a + b + c = 0$ dacă și numai dacă $ab + bc + ca = 0$.

Soluție:

a) Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$, 1p

care se rescrie succesiv $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{2}{\sqrt{yz}} + \frac{2}{\sqrt{zx}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$,

fapt evident adevărat 2p

b) Notăm cu r modulul numerelor a, b și c . Avem: $a + b + c = 0 \Leftrightarrow \overline{a + b + c} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0 \Leftrightarrow \dots$ 1p

$\Leftrightarrow 0 = \frac{a \cdot \bar{a}}{a} + \frac{b \cdot \bar{b}}{b} + \frac{c \cdot \bar{c}}{c} = \frac{r^2}{a} + \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{c} \Leftrightarrow 0 = \frac{r^2}{a} + \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{c} = r^2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ 2p

$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$ 1p

Subiectul 4

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \log_7(6^x + 1)$.

a) Arătați că funcția este inversabilă și determinați inversa sa.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(6^x + 1) = \log_6(7^x - 1)$.

Gazeta Matematică 12/2024 (Supliment)

Soluție:

a) Demonstrarea bijectivității 2p

$f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_6(7^x - 1)$ 1p

b) Fie x număr real astfel încât $f(x) = f^{-1}(x)$. Ecuația $f(x) = f^{-1}(x)$ implică, conform domeniului de definiție al funcției f^{-1} , că $x > 0$. Observăm că funcțiile f și f^{-1} sunt funcții strict crescătoare.

Fie $y = f(x)$. Vom demonstra că $y = x$. Să presupunem că $y < x$. Atunci $f(x) < x$. Cum f^{-1} este o funcție strict crescătoare, atunci $f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(x)$, adică $x < f^{-1}(x)$. Însă $f^{-1}(x) = f(x)$, ceea ce implică $x < f(x)$, adică $x < y$ ceea ce este fals. Prin raționament similar, relația $x < y$ implică $y < x$, ceea ce este fals. Prin urmare, unica posibilitate este $y = x$ 2p

Rămâne să rezolvăm ecuația $\log_7(6^x + 1) = x$. Aceasta revine la $7^x = 6^x + 1$, sau $\left(\frac{6}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x = 1$. Cum

funcția $g: (0; +\infty)$, $g(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x$ este strict descrescătoare, deci injectivă, iar $g(1) = 1$, rezultă că $x = 1$ este unica soluție a ecuației din enunț. 2p