

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a XI –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii
Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Două funcții $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se numesc prietene dacă există și este finită limita, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x))$.

- a) Arătați că funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 3x^2}$ și $g(x) = -2x$ sunt prietene.
b) Determinați numerele reale a, b cu $a > 0$ astfel încât funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 4}$ și $g(x) = -2x + b$ să fie prietene.
c) Dați un exemplu de trei funcții $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile f și h respectiv g și h să fie prietene, dar f și g să nu fie prietene.

Soluție:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 - 3x^2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(8x^3 - 3x^2)^2 + 2x\sqrt[3]{8x^3 - 3x^2 + 4x^2}}} \right) \dots\dots\dots 1p$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = -\frac{1}{4} \Rightarrow f, g$ – prietene $\dots\dots\dots 1p$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + x + 4} - 2x + b) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{a + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} - 2 + \frac{b}{x} \right) = \infty \cdot (\sqrt{a} - 2) = \begin{cases} -\infty, \sqrt{a} - 2 < 0 \\ \infty, \sqrt{a} - 2 > 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$

Cum limita este finită, atunci $\sqrt{a} - 2 = 0 \Rightarrow a = 4 \dots\dots\dots 1p$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x + 4} - 2x + b) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{\sqrt{4x^2 + x + 4} + 2x} + b \right) = \frac{1}{4} + b = \text{finită}$

Finalizare, $a = 4, b \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$

c) Putem considera $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 3x^2}, g(x) = \sqrt{4x^2 + x + 4}$ și $h(x) = -2x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + h(x)) = -\frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) + h(x)) = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \infty \dots\dots\dots 2p$

Subiectul 2

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right] - 1, & x < 0 \\ e^x - \cos x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$, unde $\left[\frac{1}{x} \right]$ este partea întreagă a lui $\frac{1}{x}$. Arătați că:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$;
b) Funcția f nu are proprietate a lui Darboux pe \mathbb{R} ;
c) Ecuația $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ are o infinitate de soluții, cel puțin una pozitivă.

Soluție:

a) $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x},$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. Pentru $x < 0 \Rightarrow 1 \leq x \left[\frac{1}{x} \right] < 1 - x$, astfel $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1. \dots\dots\dots 1p$

Pentru $x > 0 \Rightarrow 1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$, astfel $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1. \dots\dots\dots 1p$

Prin urmare, $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1. \dots\dots\dots 1p$

b) $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = -1$, deci $x = 0$ este punct de discontinuitate de speța întâi $\dots\dots\dots 1p$

Prin urmare, f nu are proprietatea lui Darboux 1p

c) Pentru $x < 0, f(x) = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x}$, de aici $\frac{1}{x} = n \in \mathbb{Z}, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}, n < 0$ sunt soluții 1p

Pentru $x \geq 0, f(x) = 0 \Rightarrow e^x - \cos x - 1 = 0$. Considerăm $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = e^x - \cos x - 1$ pentru orice $x \geq 0$. Atunci g este continuă, iar ecuația $f(x) = 0$ pentru $x \geq 0$ devine $g(x) = 0$ pentru $x \geq 0$.

Observăm că $g(0) = e^0 - \cos 0 - 1 = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$. Mai mult, avem $g(1) = e^1 - \cos 1 - 1$. Cum $\cos 1 < 1 \Rightarrow 1 + \cos 1 < 1 + 1 < e$, de unde obținem că $e - \cos 1 - 1 > 0$, adică $g(1) > 0$.

Prin urmare, există $x_0 \in (0, 1)$ astfel încât $g(x_0) = 0$. Astfel ecuația $f(x) = 0, x > 0$ are cel puțin o soluție pozitivă 1p

Subiectul 3

O matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se numește interesantă dacă are suma elementelor de pe diagonala principală egală cu zero.

Considerăm matricele $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $M(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$.

a) Fie A o matrice interesantă. Arătați că există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât toate elementele de pe diagonala principală a matricei $A - SM(a, b)S^{-1}$ să fie egale cu zero.

b) Arătați că orice matrice interesantă poate fi scrisă ca suma a trei matrice nilpotente. (O matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se numește nilpotentă dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $X^n = O_3$).

c) Dați un exemplu de trei matrice $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ care să verifice $X + Y + Z = B$ și $X^3 = Y^3 = Z^3$, unde

$$B = \begin{pmatrix} 2025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2025 \end{pmatrix}.$$

Soluție:

$$a) S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0,$$

$$A - SM(a, b)S^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} - b & a_{12} + b & a_{13} - b \\ a_{21} - b & a_{22} - a + b & a_{23} + a - b \\ a_{31} & a_{32} - a & a_{33} + a \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

$$a_{11} - b = 0, a_{22} - a + b = 0, a_{33} + a = 0, \text{ deci } a_{11} = b, a_{33} = -a \text{ (se verifică } a_{22} - a + b = 0) \dots\dots\dots 1p$$

$$b) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0, M(a, b) = M(-a_{33}, a_{11}) = M \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Conform a) } A - SM(a, b)S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 0 & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix} \text{ deci alegem } X = SMS^{-1}, X^3 = SM^3S^{-1} = O_3$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y^3 = O_3, Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}, Z^3 = O_3 \text{ și atunci } A = X + Y + Z; X, Y, Z \text{ nilpotente} \dots\dots\dots 1p$$

c) Folosim b) $X = SM(2025, 2025)S^{-1} = \begin{pmatrix} 2025 & -2025 & 2025 \\ 2025 & 0 & 0 \\ 0 & 2025 & -2025 \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} 0 & 2025 & -2025 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2025 & 0 & 0 \\ 0 & -2025 & 0 \end{pmatrix}$, $B = X + Y + Z$ și $X^3 = Y^3 = Z^3 = O_3$ 2p

Subiectul 4

Ana vrea să planteze, în grădina sa, trei copaci. Considerăm că suprafața grădinii este raportată la reperul cartezian xOy , unitatea de măsură, pe axele reperului, fiind egală cu 1m. Un peisagist i-a sugerat să planteze primul copac în punctul $A(3,0)$; al doilea copac să-l planteze pe dreapta (d) de ecuație $4x - y - 12 = 0$, la o distanță egală cu $\sqrt{17}$ m față de primul copac; iar ultimul copac să-l planteze pe parabola p de ecuație $y = x^2$.

Ana își dorește ca aria suprafeței triunghiulare determinată de cei trei copaci să fie minimă.

a) Ajut-o pe Ana să determine pozițiile celor trei copaci.

b) Scrieți ecuația dreptei pe care sunt situați al doilea și al treilea copac.

Soluție

a) $B \in d$ și $AB = \sqrt{17} \Rightarrow (x - 3)^2 + (4x - 12)^2 = 17 \Rightarrow B_1(4,4)$ sau $B_2(2, -4)$ 2p

$A_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ 1p

Pentru $B = B_1(4, 4)$, $C(x, x^2)$, $\Delta = x^2 - 4x + 12$, $A_{ABC} = \frac{1}{2}((x - 2)^2 + 8) =$ minimă pentru $x = 2$

$\Rightarrow C(2, 4)$ 2p

Pentru $B = B_2(2, -4)$, $C(x, x^2)$, $\Delta = -x^2 + 4x - 12$, $A_{ABC} = \frac{1}{2}((x - 2)^2 + 8) =$ minimă pentru $x = 2$

Deci $C(2, 4)$. Prin urmare, ambele poziții pentru punctul B pot fi alese. 1p

b) $B = B_1(4, 4)$, $C(2, 4)$ ecuația dreptei BC este $y = 4$ sau $B = B_2(2, -4)$, $C(2, 4)$ ecuația dreptei BC este

$x = 2$ 1p