

**Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”****Etapă județeană****08 martie 2025****XI. osztály – H1 – Szakközép****1. Feladat**

Adottak az  $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  és  $M_a = I_2 + aA$  mátrixok, ahol  $a$  valós szám.

- Igazold, hogy  $5M_3 - 4M_{-1} = M_{19}$ .
- Határozd meg azokat az  $a$  valós számokat, amelyekre az  $M_a$  mátrix invertálható!
- Határozd meg azokat az  $a$  valós számokat, amelyekre  $M_a \cdot M_a = M_0$ .

**2. Feladat**

Adottak az  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 1$  és  $g(x) = x^3 + x^2 + 2x$  függvények.

- Igazold, hogy a  $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+f(x)} - \sqrt{f(x)}}{x}$  racionális szám!
- Határozd meg a  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = g(x) - f(x)$  függvény grafikus képe azon pontjának pozitív abszcisszáját, amelyben a grafikus képhez húzott érintő párhuzamos az  $y = 5x + 1$  egyenletű  $d$  egyenessel!
- Igazold, hogy a  $g(x) = f(x) + 3$  egyenletnek egyetlen valós megoldása van az  $(1; 2)$  intervallumon.

**3. Feladat**

A részvények eladási árát követték (bitcoin-ban értékelve) a kezdettől (amikor megjelent a New York-i tőzsdén) egészen a  $T$  időpontig (amíg elfogyott). A maximális eladási ár a  $t_0$  időpontban volt. A részvények árának változását a következő függvény mutatja

$$P : [1; T] \rightarrow (0, 3], P(t) = \begin{cases} 2^t - 1, & 1 \leq t \leq t_0 \\ 4 - \sqrt{t - a}, & t_0 < t \leq T \end{cases} \text{ ahol } a \in \mathbb{R}, t \text{ a tranzakció ideje órában kifejezve, a}$$

$t_0$  pedig az a pillanat, amikor az eladási ár eléri a maximális 3 bitcoin küszöböt.

- Határozd meg  $t_0$ -t!
- Határozd meg  $a \in \mathbb{R}$  értékét, tudva, hogy a részvényárak tranzakciójában egyetlen folytonossági zavar sem történt!
- Ha  $a = 1$ , határozd meg a  $T$  értékét, tudva azt, hogy az utolsó részvény értéke megegyezett a részvény piacra dobási árával!

**4. Feladat**

Egy építkezési vállalat az  $A$  és  $B$  helységek közötti autópálya tervét készíti el, ezek koordinátái  $(20, 30)$ , illetve  $(60, 110)$ , ahol 1 egység a kadaszteri térképen a valóságban 1 km-nek felel meg. Az autópálya a két település közötti legrövidebb útszakasz és átszel egy erdős részt is.

- Igazold, hogy a  $(30, 50)$  koordinátájú  $M$  település az épülő autópálya nyomvonalán van!
- Ha tudjuk, hogy az erdős részek az autópálya mindkét oldalán helyezkednek el és a kadaszteri térképen az  $M, N(a, 70)$  és  $P(50, 60)$  pontok határolják, határozd meg az  $a$  valós paraméter értékét, ha az erdős rész területe  $250 \text{ km}^2$ !

**Timp de lucru: 3 ore.****Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7**