

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)
Matematică M_{șt-nat}

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozza meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani haladvány a_2 tagját, ha $a_1 = 5$ és $a_3 = 35$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ függvény. Határozza meg azt az m valós számot, amelyre $f(m) = f(0) \cdot f(1)$.
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{3x - 6}$ egyenletet!
- 5p 4. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy az egyjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott n szám esetén teljesüljön a $3n^2 < 100$ egyenlőtlenség!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(0, 2)$, $B(2, 5)$ és C pontok úgy, hogy B az AC szakasz felezőpontja. Határozza meg a C pont koordinátáit!
- 5p 6. Az A -ban derékszögű ABC háromszög területe 18 és $AB = AC$. Igazolja, hogy $BC = 6\sqrt{2}$.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 3x \\ -x & 1+4x \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(2)) = 3$.
- 5p b) Igazolja, hogy $xA(y) - A(xy) = (x-1)I_2$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p c) Határozza meg azokat az x valós számokat, amelyekre $A(1) \cdot A(x-1) = xA(x)$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = \frac{1}{4}(x+1)(y+1) - 1$ műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy $1 \circ 5 = 2$.
- 5p b) Igazolja, hogy $e = 3$ a „ \circ ” művelet semleges eleme!
- 5p c) Határozza meg azokat az (m, n) természetes számpárokat, amelyekre $m \leq n$ és $m \circ n = 3$.

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 1 + \ln x$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Igazolja, hogy $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3x}{\ln x} = 3$.
- 5p c) Bizonyítsa be, hogy $f(x) + f(y) \leq -\frac{21}{4}$, bármely $x \in (0, 1]$ és bármely $y \in [1, 2]$ esetén!
2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $\int_2^4 f(x) \sqrt{x} dx = 4$.
- 5p b) Igazolja, hogy $\int_1^4 f(x) dx = \frac{8}{3}$.

-
- 5p** c) Igazolja, hogy a $g : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{f(x)}$ függvény grafikus képének az Ox tengely körüli forgatásából kapott forgástest térfogata $\pi \ln(4e)$.